Chapitre 5

Calcul littéral

5.1 Rappels

Les règles suivantes d'écriture ont été données les années précédentes.

Définition 1: Expression littérale

Une expression littérale est une expression dans laquelle un ou plusieurs nombres sont désignés par des lettres.

Exemple 1

On pense à un nombre, on le multiplie par 3, puis on ajoute 7 au résultat. Cette suite d'instruction peut être écrite sous la forme d'une expression littérale : $x \times 3 + 7$

Propriété 1: Convention d'écriture

Pour alléger l'écriture d'une expression littérale, on peut **supprimer le signe** $\times$ **devant une lettre ou une parenthèse.**

Exemple 2

bc signifie $b \times c$
3a signifie $3 \times a$
k(a+b) signifie $k \times (a + b)$

Remarque 1

On ne peut pas supprimer le signe $\times$ entre deux nombres.

Définition 2: Substitution

Pour calculer une expression littérale pour une certaine valeur de la lettre, **on remplace cette lettre par cette valeur**.

Exemple 3: Calculer $A = 3x(x+4)$ pour $x = 2$

$A = 3 \times x \times (x+4)$ On fait apparaitre les signes $\times$ dans l'expression A.
$A = 3 \times 2 \times (2+4)$ On remplace la lettre x par la valeur 2.
$A = 3 \times 2 \times 6$ On effectue les calculs en respectant les priorités opératoires.
$A = 36$

5.2 Egalité de deux expressions littérales

Propriété 2: Prouver l'égalité de deux expressions littérales

Deux expressions littérales sont égales si elles sont **égales quelque soit la valeur attribuée à la lettre.**

Exemple 4: Prouver que $4x + 5x - 6 = -2 + 3x - 2 + 3x - 2 + 3x$

On réduit le membre de gauche $4x + 5x - 6 = 9x - 6$
On réduit le membre de droite $-2 + 3x - 2 + 3x - 2 + 3x = 3x + 3x + 3x - 2 - 2 - 2 = 9x - 6$
Ces deux expressioons sont égales à $9x - 6$

Propriété 3: Prouver l'inégalité de deux expressions littérales

Pour prouver que deux expressions littérales ne sont pas égales, **il suffit de trouver une valeur** pour laquelle les deux expressions donnent des résultats différents.

Exemple 5: Prouver que $4x + 3 \neq 7x$

On calcule le membre de gauche pour x = 2 $4x + 3 = 4 \times 2 + 3 = 8 + 3 = 11$
On calcule le membre de droite pour x = 2 $7x = 7 \times 2 = 14$

Pour x=2, on a $4x + 3 = 11$ et $7x = 14$, donc $4x + 3 \neq 7x$

5.3 Distributivité simple

Définition 3: Produit et somme

Une expression littérale est un **produit** si la **dernière opération effectuée** lorsqu'on substitue l'inconnue par sa valeur est une **multiplication**.

Une expression littérale est une **somme** si la **dernière opération effectuée** lorsqu'on substitue l'inconnue par sa valeur est une **addition**.

Propriété 4

Pour n'importe quels nombres a, b et k :

$$k\times(a+b) = k\times a+k\times b$$

Autrement dit, le produit de k par la somme de a et b est égal à la somme du produit de k par a et du produit de k par b.

Définition 4: Développer

Développer une expression, c'est transformer un produit en une somme.

Exemple 6: Exemples de développements

1. Développer 9(4+x)

$$\begin{aligned} 9\times(4+x) &= 9\times 4+9\times x \\ &= 36+9x \\ &= 9x+36 \end{aligned}$$

2. Développer 5(2x-7)

$$\begin{aligned} 5\times(2x-7) &= 5\times(2x+(-7)) \\ &= 5\times 2x+5\times(-7) \\ &= 10x+(-35) \\ &= 10x-35 \end{aligned}$$

5.4 Factorisation

Définition 5: Factorisation

Factoriser une expression, c'est transformer une somme en un produit.

Propriété 5: Factorisation

Pour n'importe quels nombres a, b et k :

$$\mathbf{k} \times a + \mathbf{k} \times b = \mathbf{k} \times (a+b)$$

k est appelé le facteur commun.

Remarque 2: Visibilité du facteur commun

Le facteur commun sera parfois visible, mais il peut aussi demander un travail particulier pour être exhibé.

Exemple 7: Exemple de factorisation

1. $\mathbf{3} \times x + \mathbf{3} \times y = \mathbf{3} \times (x+y)$
2. $x^2 + 4 \times x = \mathbf{x} \times x + 4 \times \mathbf{x} = \mathbf{x} \times (x+4)$
3. $21x + 56y = \mathbf{7} \times 3x + \mathbf{7} \times 8y = \mathbf{7} \times (3x+8y)$

Remarque 3: Généralisation

Le travail réalisé ici sur les sommes pourrait être étendu aux soustractions ou aux successions d'additions et soustractions. Dans une telle situation, on se rapellera que : [**?**]oustraire un nombre revient à ajouter son opposé.

Définition 6: Opposé

L'opposé d'un nombre x est $-x$.

5.5 Programme de calcul

Nous allons comparer les programmes de calculs suivants (à l'aide d'un exemple) :
1/ Programme 1 : Choisir un nombre, le tripler, puis ajouter 15.
2/ Programme 2 : Choisir un nombre, lui ajouter 5, puis multiplier le résultat par 3.

Programme 1

1. Choisir un nombre : 6
2. Le tripler : $6 \times 3 = 18$
3. ajouter 15 : $18 + 15 = 33$

Programme 2

1. Choisir un nombre : 6
2. Lui ajouter 5 : $6 + 5 = 11$
3. Multiplier par 3 : $11 \times 3 = 33$

Conclusion : pour x = 6, les deux programmes donnent le même résultat.

Nous allons maintenant comparer de manière générale à l'aide du calcul littéral :

Programme 1

1. Choisir un nombre : x
2. Le tripler : $3x$
3. ajouter 15 : $3x + 15$

Programme 2

1. Choisir un nombre : x
2. Lui ajouter 5 : $x + 5$
3. Multiplier par 3 : $3 \times (x + 5)$
   On développe l'expressions littérale obtenue :

$$\begin{aligned} 3 \times (x + 5) &= 3 \times x + 3 \times 5 \\ &= 3x + 15 \end{aligned}$$

Conclusion : les deux programmes de calcul sont équivalents.