Chapitre 2

Proportionnalité (1ère partie)

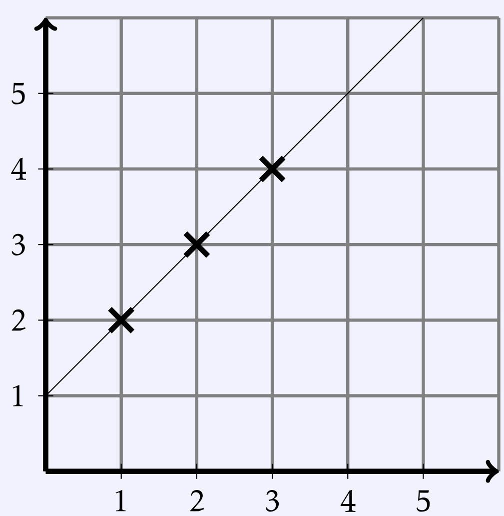
2.1 Représentation graphique

Définition 1: Représentation graphique d'une situation de proportionnalité

- Une situation de proportionnalité est représentée graphiquement dans un repère par des points alignés avec l'origine de ce repère.
- Réciproquement, si une situation est représentée graphiquement par des points alignés avec l'origine du repère, alors, cette situation est une situation de proportionnalité.

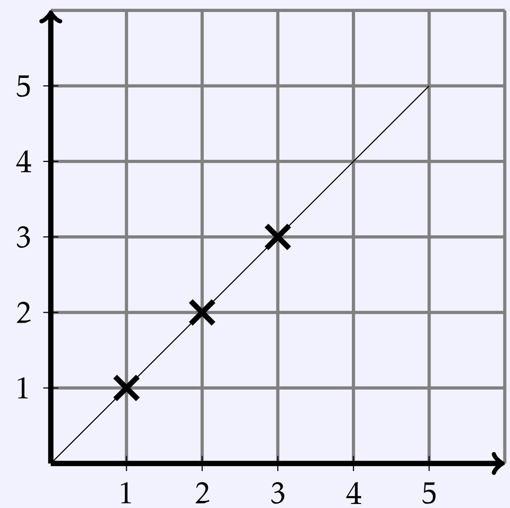
Exemple 1: Représentation graphique

Les points sont alignés mais la droite les reliant ne passe pas par l'origine du repère. Cette situation n'est donc pas une situation de proportionnalité.



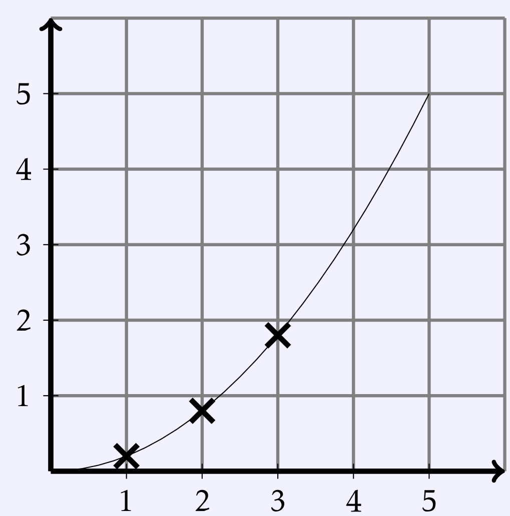
Exemple 2: Représentation graphique

Les points sont alignés et la droite les reliant passe par l'origine du repère. Cette situation est donc une situation de proportionnalité.



Exemple 3: Représentation graphique

Les points ne sont pas alignés. Cette situation n'est donc pas une situation de proportionnalité.



2.2 Calcul d'une quatrième proportionnelle

Propriété 1: Produit en croix

Soient a, b, c et d quatre nombres relatifs non nuls tels que le tableau :

a	b
c	d

est un tableau de proportionnalité. Alors on a l'égalité des produits en croix :

$$\boldsymbol{a \times d = b \times c}$$

Remarque 1: Règle de trois

Ainsi pour calculer la valeur du nombre relatif d, on utilisera la règle de trois (s'expliquant à l'aide de l'égalité des produits en croix) :

$$\boldsymbol{d = \frac{b \times c}{a}}$$

Exemple 4: Produit en croix

Chez le primeur, 3kg d'abricots coûtent 6€. Combien coûteront 4kg d'abricots ?

Masse d'abricots (en kg)	3	4
Prix (en €)	6	?

Nous allons donc utiliser l'égalité des produits en croix (d'autres méthodes pourraient être envisagées) :

$$3 \times ? = 4 \times 6$$

Soit :

$$3 \times ? = 24$$

Ainsi :

$$? = \frac{24}{3}$$

Le prix de 4kg d'abricots est donc de 8€.

2.3 Applications

2.3.1 Pourcentages

Définition 2: Pourcentages

Déterminer un pourcentage c'est trouver une proportion écrite sous la forme d'une fraction décimale de dénominateur 100

Propriété 2: Pourcentages

Appliquer un taux de t% à un nombre revient à multiplier ce nombre par $\frac{t}{100}$.

Remarque 2: Pourcentages à connaître

Certains pourcentages sont à connaître :
- Prendre 10% d'un nombre revient à diviser ce nombre par 10 (ou à prendre le dixième).
- Prendre 25% d'un nombre revient à diviser ce nombre par 4 (ou à prendre le quart).
- Prendre 50% d'un nombre revient à diviser ce nombre par 2 (ou à prendre la moitié).

Remarque 3: Interprétation

Il y a 890 élèves dans un collège et 25% des élèves de ce collège sont latinistes.
« 25% des élèves du collège sont latinistes » signifie que :
- Le nombre d'élèves latinistes est proportionnel au nombre d'élèves du collège,
- Pour 100 élèves de ce collège, 25 élèves font du latin,
- Pour calculer le nombre d'élèves latinistes de ce collège, on calcule 25% de 890.

Exemple 5: Remise

Un pantalon coûte 89€. Une remise de 20% est faite sur ce pantalon par un magasin. Quel est son nouveau prix après remise ?

<u>Calcul de la remise :</u>
$\frac{20}{100} \times 89 = 17,8$
soit une remise 17,8 € (une remise est une réduction, on retire donc ce montant au prix initial pour obtenir le prix remisé)

<u>Calcul du nouveau prix :</u>

$89-17,8=71,2$
soit 71,2 €
Le pantalon coûtera donc 71,2 € après remise.

Avec un tableau de proportionnalité :

Remise (en €))	20	?
Prix initial (en €)	100	89

La remise sera donc de : $\dfrac{20\times 89}{100}=17,8$€.

Exemple 6: Taxe

La TVA est une taxe de 20% appliquée au prix hors taxe (HT) pour donner le prix toutes taxes comprises (TTC). Le montant HT des travaux effectués par le maçon pour le crépi d'une façade s'élève à 2 650 €. Quel est le montant TTC ?

Calcul de la TVA :
$\dfrac{20}{100}\times 2650=530$
soit une TVA de 530 € (*Une taxe vient s'ajouter au prix initial, il s'agit d'une augmentation de prix*).

Calcul du prix TTC :
$2650+530=3180$
soit un montant TTC des travaux de 3 180 €.

Ainsi les travaux coûteront donc 3 180 € au propriétaire de la maison.

2.3.2 Echelles

Définition 3: Echelle

$$Echelle=\frac{\textit{longueurs sur le plan ou la maquette}}{\textit{longueurs réelles}}$$

Les longueurs doivent être exprimées dans la même unité.
Par convention, on se ramènera toujours à une fraction de numérateur égal à 1.

Remarque 4: Interprétation

Si une représentation est à l'échelle $\frac{1}{2500}$, cela signifie que toutes les dimensions ont été divisées par 2500. Inversement, 1 cm sur la représentation correspond à 2 500 cm en réalité.

Exemple 7: Utilisation de l'échelle

Une carte est représentée au $\frac{1}{100000}$ (un cent-millième).
Quelle sera la longueur réelle correspondant à une longueur de 4,5 cm mesurée sur la carte ?

Longueurs sur la carte (en cm)	1	4.5
Longueurs réelles (en cm)	100000	?

Ainsi,

$$? = \frac{100000 \times 4.5}{1} = 450000$$

soit 450 000 cm soit 4 500 m ou 4.5 km.
4.5 cm sur la carte représenteront donc 4.5 km en réalité.

Exemple 8: Retrouver l'échelle

Nous avons construit une maquette de la Tour Eiffel. Cette maquette mesure 16,2 cm. Sachant que la Tour Eiffel mesure en réalité 324 m, quelle est l'échelle de notre maquette ?

Longueurs sur la maquette (en cm)	1	16.2
Longueurs réelles (en cm)	?	32 400

Ainsi :

$$? = \frac{1 \times 32400}{16.2} = 2000$$

soit 2 000 cm (soit 20 m).
L'échelle de notre maquette est donc $\frac{1}{2000}$.

2.3.3 Vitesses

Définition 4: Vitesse moyenne

La vitesse moyenne d'un mobile qui parcourt une distance d pendant la durée t est égale au quotient de d par t.
On note :

$$v = \frac{d}{t}$$

La vitesse est une grandeur quotient.

Remarque 5: Autres formules

On aura aussi :

— La distance :

$$d = v \times t$$

— La durée :

$$t = \frac{d}{v}$$

Exemple 9

Une voiture roule à 120 km/h sur l'autoroute. Quelle distance parcourra-t-elle en 2h30 ? Combien de temps mettra-t-elle pour parcourir une distance de 150 km ?
2h30 correspondent à 2h et une 1/2 heure soit 2,5 heures. Si on utilise directement le calcul de la distance, on obtient :

$$d = 120 \times 2.5 = 300$$

soit 300 km parcourus.

$$t = \frac{150}{120} = 1.25$$

soit 1.25 h.
Ainsi, comme $0.25 \times 60 = 15$ soit 15 minutes, il faudra donc 1h15 pour parcourir une distance de 150 km.

Nous aurions également pu utiliser un tableau de proportionnalité. Pour ce faire, tout d'abord, convertissons les heures en minutes :

$$2h30 = 2 \times 60 + 30 = 150 minutes$$

Distance d (en km)	120	d	150
Temps t (en min)	60 (1h)	150 (2h30)	t

Ainsi, on aura :

$$d = \frac{150 \times 120}{60} = 300$$

soit 300 km.
Et :

$$t = \frac{150 \times 60}{120} = 75 = 60 + 15$$

soit 1h15.