Chapitre 3

Agrandissement - Réduction

3.1 Agrandissement et rédaction

Définition 3.1: Agrandissement-Réduction

Si deux figures ont les mêmes angles et si les longueurs sont proportionnelles alors l'une est un agrandissement ou une réduction de l'autre.

Définition 3.2: Coefficient d'agrandissement

L'agrandissement ou la réduction d'une figure est déterminé par un coefficient souvent noté k. On trouve la valeur de k en calculant le quotient suivant :

$$k = \frac{\text{dimension modifiée}}{\text{dimension initiale}}$$

Le coefficient k est sans unité.
Si $k > 1$ alors il s'agit d'un agrandissement, et si $0 < k < 1$ alors il s'agit d'une réduction.

Exemple 3.1: Calcul d'un coefficient de réduction

A Macao en Chine, se trouve une réplique de la Tour Eiffel haute de 160 m dans le complexe hôtelier The Parisian Macao. La Tour Eiffel mesure en réalité 324 m. Quel est le rapport de réduction ?

$$k = \frac{160}{324} \simeq 0,5$$

Propriété 3.1: Utilisation pratique

Pour agrandir ou réduire une figure à l'aide d'un coefficient d'agrandissement k, on doit multiplier toutes ses dimensions par k :

$$\text{dimension modifiée} = \text{dimension initiale} \times k$$

Exemple 3.2: Agrandissement d'un segment

On considère le segment $[AB]$ de longueur 2 cm. Son agrandissement de coefficient $k = 3$ est un segment. Si $[CD]$ est cet agrandissement alors :

$$\begin{aligned} CD &= AB \times k \\ &= 2 \times k \\ &= 2 \times 3 \\ &= 6 \end{aligned}$$

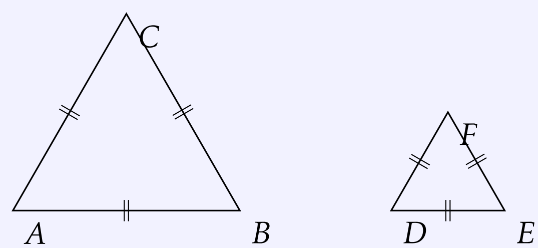
L'agrandissement du segment $[AB]$ a une longueur de 6 cm

Exemple 3.3: Réduction d'un triangle équilatéral

On considère un triangle équilatéral ABC de côté 3 cm et on souhaite réaliser une réduction de coefficient $0,5$.
La figure obtenue est un triangle équilatéral (car la forme est conservée) et la nouvelle mesure du côté obtenue de la manière suivante.

$$\begin{aligned} \text{dimension finale} &= \text{dimension initiale} \times k \\ &= 3 \times 0,5 \\ &= 1,5 \end{aligned}$$

La réduction est donc un triangle équilatéral de côté $1,5$ cm.



Propriété 3.2: Effet d'un agrandissement ou d'une réduction

Quand on multiplie toutes les dimensions d'une figure par k :
- son aire (s'il y a lieu) est multipliée par k^2 ;
- son volume (s'il y a lieu) est multiplié par k^3.

Démonstration. La preuve proposée ici ne traite que du cas du carré et du cube.

Carré On considère un carré $ABCD$ de côté c. Son aire $\mathcal{A}_{ABCD}$ est alors :

$$\mathcal{A}_{ABCD} = c^2 = c \times c$$

La figure agrandie (ou réduite) avec un coefficient k sera un carré de côté $c' = k \times c$ (cf.

propriete 3.1). Notons $\mathcal{A}'$ son aire. Cette dernère est alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}' &= c'^2 \\
&= c' \times c' \\
&= (k \times c) \times (k \times c) && \text{agrandissement/réduction de coefficient } k \\
&= k \times c \times k \times c \\
&= k \times k \times c \times c \\
&= k^2 \times c^2 \\
&= k^2 \times \mathcal{A}_{ABCD}
\end{aligned}$$

Ce qui prouve le premier point.

Cube Soit un cube $\mathcal{C}$ d'arête de longueur a. Son volume $\mathcal{V}_{\mathcal{C}}$ est alors :

$$\mathcal{V}_{\mathcal{C}} = a^3 = a \times a \times a$$

Prenons maintenant le cas du cube $\mathcal{C}'$ de volume $\mathcal{V}'$ et d'arête $a' = k \times a$, agrandissement (ou un réduction) de coefficient k du cube de départ.

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}' &= (a')^3 \\
&= a' \times a' \times a' \\
&= (k \times a) \times (k \times a) \times (k \times a) && \text{agrandissement/réduction de coefficient } k \\
&= k^3 \times a^3 \\
&= k^3 \times \mathcal{V}_{\mathcal{C}}
\end{aligned}$$

□

Exemple 3.4: Effet d'un agrandissement sur l'aire d'un carré

On considère le triangle ABC d'aire 3 cm^2, alors son agrandissement de coefficient $k = 2$ sera un triangle d'aire $3 \times k^2 = 3 \times 2^2 = 3 \times 4 = 12$ cm^2.

Exemple 3.5: Effet d'une réduction sur un solide

On considère un solide (quelconque) de volume $\mathcal{V} = 32$ cm^3. La réduction de coefficient $k = 0,5$ de ce solide aura pour volume :

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}' &= k^3 \times \mathcal{V} \\
&= 0,5^3 \times 32 \\
&= 0,125 \times 32 \\
&= 4
\end{aligned}$$

Soit $\mathcal{V}' = 4$ cm^3.